ГЛАВА ЧЕТВЪРТА

МОДЕЛИРАНЕ НА ПРОЦЕСА НА ФОРМООБРАЗУВАНЕ И РАЗМЕРООБРАЗУВАНЕ НА СЛОЖНИ ПРОФИЛНИ ПОВЪРХНИНИ ПРИ МЕХАНИЧНО ОБРАБОТВАНЕ (СИНТЕЗИРАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИТЕ НА ТОПОЛОГИЧНИЯ МОДЕЛ)

4.1. Аналитично изразяване на закона на движение на тяло в матрична форма

Една от съставните части на теорията на формообразуването се явява методът на съставяне на математически модел на технологичен процес, използван за получаване на повърхност от детайла чрез рязане. В математическия модел влиза описание формата на режещия ръб на инструмента и закона на неговото движение относно заготовката. При това, като правило, се разглеждат няколко координатни системи на отчитане и се работи със сравнително сложно движение на телата.

За съставяне на математически модел на произволен процес на формообразуване, удачно се указва матричното записване на закона на движение на телата. Този начин се използва и за моделиране на процеса на механично обработване на детайли с периодичен профил [83, 132]

4.1.1. Матрица на завъртане на вектора

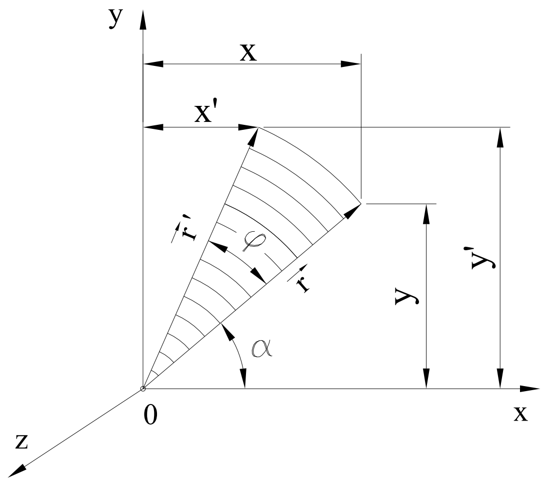
За разбиране на смисъла на завъртане на вектора ще се разгледа примера, показан на фиг. 3.1. В декартовата координатна система Σ векторът $\vec{r}\,(x, y)$ се завърта на ъгъл φ около ос z. Новото пложение на вектора е $\vec{r}\,'$. Координатите на новото положение на вектора са x', y' и се определят по формули (фиг. 4.1):

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\varphi+\alpha) = r(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha), \\ y' &= r\sin(\varphi+\alpha) = r(\sin\,\varphi\cos\alpha + \sin\alpha\cos\varphi), \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (4.1\,)$$

където r е радиус- векторът; α - ъгъл, определящ първоначалното положение на вектора.

Отчитайки, че $r\cos\alpha = x$, $r\sin\alpha = y$ се получава:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + z.0 \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi + z.0 \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (4.2\,)$$



Фиг. 4.1 Завъртане на вектор

Завъртането на вектора около ос z може да се изрази и по друг начин. Може да се състави матрица като се използват коефициентите пред x , y във формула 4.2:

$$[M(\varphi)]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

Може да се запишат стълбовете на матриците, съответстващи на векторите $\vec{r}\ u\ \vec{r}'$:

$$[r]=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \quad , \quad [r']=\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{bmatrix} \qquad (4.4)$$

Не е трудно де се убедим в следващия запис $[r']=[M][r]$.

Последният израз и негови подобни често могат да се записват по следния начин :

$$\vec{r}'=[M]\vec{r} \qquad (4.5)$$

По такъв начин формула 4.2. и формула 4.5 изразяват една и съща операция-завъртане на вектора, но едната е записана в координатна форма, а другата - в матрична.

Формула 4.5 се използва и в общия случай, когато завъртането става около произволна ос. Матрицата $[M]$ се нарича матрица на завъртане на вектора или съкратено – **матрица на завъртането**.

Всяка матрица на завъртането се характеризира от две величини: ъгъл на завъртането и координати разположени по оста на въртене. Ъгълът на въртене ще се приема за положителен , ако в края на оста на въртене, векторът се върти обратно на часовата стрелка. Означението на матрицата на въртене е правилно да се допълни с ъгъла на въртене и означение на оста на въртене. Например $[M(\vec{e}\,\varphi)]$ - това е матрица, която се завърта около ос е на ъгъл φ.

Общият вид на матрицата на въртене ще има вида :

$$[M(\vec{e}\,\varphi)]=\begin{bmatrix} e_i^2\,\sigma+\cos\varphi & e_c e_j\,\sigma-e_k\sin\varphi & e_i\,e_k\sigma+e_j\,\sin\varphi \\ e_j\,e_i\sigma+e_k\sin\varphi & e_j^2\,\sigma+\cos\varphi & e_j e_и\,\sigma-e_c\sin\varphi \\ e_k\,e_i\,\sigma-e_j\sin\varphi & e_k\,e_j\,\sigma+e_i\sin\varphi & e_k^2\,\sigma+\cos\varphi \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

където $\sigma=1-\cos\varphi$; $e_i\,,e_j\,,e_k$ са проекции на оста $\vec{e}$ е координатната система Σ.

Ако завъртането на вектора става около първата координатна ос (ос x), зададен в неподвижната система с координатите си $\vec{i}=\{1,0,0\}$, матрица 4.6 добива вида :

$$[M(1,\varphi)]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Аналогично :

$$[M(2,\varphi)]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \; , \; [M(3,\varphi)]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Матрица обратна на дадената матрица на завъртане се получава чрез транспониране (замяна на редовете на дадена матрица с нейните стълбове):

$$\left[M^{-1}(\varphi)\right]=\left[M^{T}(\varphi)\right] \tag{4.8}$$

Транспонирането на матрицата на завъртане се свежда до замяна в изходната матрица на аргумента φ с аргумента (-φ):

$$\left[M^{T}(\varphi)\right]=\left[M(-\varphi)\right] \tag{4.9}$$

След обединяване на последните две зависимости, за матрицата на завъртане може да се запише следното свойство :

$$\left[M^{-1}(\varphi)\right]=\left[M^{T}(\varphi)\right]=\left[M(-\varphi)\right] \tag{4.10}$$

4.1.2. Диференциране на матрицата на завъртане

Диференциране на матрицата на завъртане може да стане като непосредствено се диференцира по ъгъла на завъртане всеки елемент на матрицата, или с помощта на определени формули :

$$\frac{d[M(\vec{e}\,\varphi)]}{d\varphi} = [M(\vec{e}\,\varphi)].[\Omega(\vec{e})] = [\Omega(\vec{e})].[M(\vec{e},\varphi)]\ , \tag{4.11}$$

където $[\Omega(\vec{e})] = \begin{bmatrix} 0 & -e_к & e_й \\ e_к & 0 & -e_i \\ -e_й & e_i & 0 \end{bmatrix}$ (4.12)

Величините $e_i\ , e_j\ , e_k$ са направляващите косинуси на оста на въртене $\vec{e}$.

Спомагателната матрица $[\Omega(\vec{e})]$ напълно характеризира само една величина – координатите на оста на въртене, поради това и само тази величина се поставя в малки скоби след името на матрицата. Например :

$$\frac{dM(\vec{k}, i\Psi)}{d\Psi} = iM(\vec{k}\ , i\Psi)\Omega(\vec{k}) \tag{4.13}$$

където I е константата, а матрицата $\Omega(\vec{\kappa})$ се определя по формула 4.12 след замяна в нея на оста $\vec{e}$ с координатата $\vec{\kappa}$.

Производните на матрицата на завъртането около координатните оси се определят по формулите :

$$\frac{d[M(1,\varphi)]}{d\varphi}\ \ [M(1,\varphi)][\Omega(1)] = [\Omega(1)][M(1,\varphi)] \tag{4.14}$$

$$\frac{d[M(2,\varphi)]}{d\varphi} = [M(2,\varphi)][\Omega(2)] = [\Omega(2)][M(2,\varphi)] \tag{4.15}$$

$$\frac{d[M(3,\varphi)]}{d\varphi} = [M(3,\varphi)][\Omega(3)] = [\Omega(3)][M(3,\varphi)] \tag{4.16}$$

$$[\Omega(1)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, [\Omega(2)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [\Omega(3)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Диференцирането на матрици се явява произведение на матрици :

$$[M(\varphi)] = [A(\varphi)][B(\varphi)] \tag{4.18}$$

Това става по следния начин :

$$\frac{d[M(\varphi)]}{d\varphi} = \frac{d[A(\varphi)]}{d\varphi}[B(\varphi)] + [A(\varphi)]\frac{d[B(\varphi)]}{d\varphi} \tag{4.19}$$

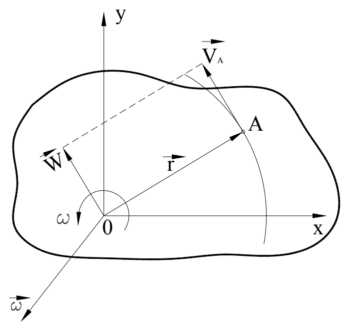
Както се вижда от формулата при диференциране на матрично произведение не трябва да се менят местата на множителите.

4.1.3. Свойства на спомагателната матрица $[\Omega]$

За да се разясни смисълът на тази спомагателна матрица $[\Omega]$ се разглежда едно тяло в координатна система x,y,z , въртящо се около ос z с единична ъглова скорост ω (Фиг. 4.2.).

Скоростта на точка А, положението на която се определя от радиус-вектора $\vec{r}$ се определя по формулата на Ойлер [11, 132] :

$$v_A = \vec{\varpi} \times \vec{r} \tag{4.20}$$



Фиг. 4.2. Вектор на ъгловата и линейна скорост

При сравняване на вектора $\vec{v}_A$ с вектора $\vec{w} = [\Omega(3)]\vec{r}$, след като се изчислят проекциите на тези вектори по координатните оси :

$$\vec{\varpi} \times \vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, \ [\Omega(3)]\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

От получените изрази се вижда , че десните части са равни. От това следва извода,че и левите части са равни:

$$[\Omega(3)]\,\vec{r} = \vec{\varpi} \times \vec{r} \tag{4.22 }$$

Като се отчете, че $\vec{\varpi} = 1.\vec{k}$ ($\vec{k}$ - координата по ос z) формула 4.22 може да се запише по следния начин :

$$[\Omega(3)]\vec{r} = \vec{k} \times \vec{r} \tag{4.23}$$

Формули 4.22 и 4.23 позволяват да се направи извода,че матрица $[\Omega(3)]$ играе роля на единичен вектор на ъгловата скорост, минаващ по оста на въртене.

Формула 4.23 може да се запише и за въртене на тялото около произволна ос:

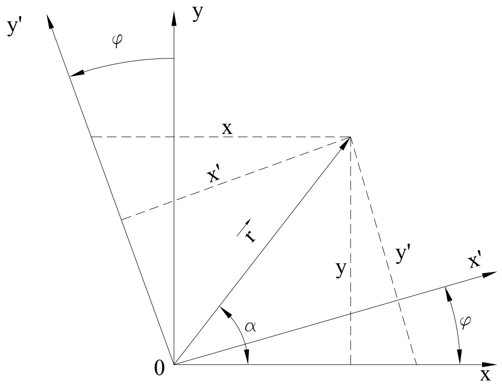
$$[\Omega(\vec{e})]\,\vec{Q} = \vec{e} \times \vec{Q} \tag{4.24}$$

където $\vec{Q}$ е произволен вектор; $\vec{e}$ - координата на $\vec{Q}$.

4.1.4. Матрица на преобразуване на координатите и нейната връзка с матрицата на завъртане на вектора

Заедно с матрица $[M]$ за завъртане на вектора, може да се използва матрицата $[G]$ за преобразуване на координатите при преход от една координатна система за отчитане в друга (фиг. 4.3).

В началото се разглежда случая, когато началото на двете координатни системи съвпада. В координатна система Σ положението на точката се характеризира от вектора $\vec{r}$. Нужно е да се намери радиус-вектора $\vec{r}'$, на същата точка, но в система Σ', която е получена от система Σ чрез нейното завъртане на ъгъл φ около ос $\vec{e}$, преминаваща през началото на координатните системи (фиг.4.3). Това осигурява преминаване от система Σ в система Σ'.



Фиг.4.3. Координати на една точка в две системи на отчитане

Търсеният радиус-вектор в координатна система Σ' има вида :

$$\vec{r}' = [G(\vec{e}, \varphi)]\vec{r} \tag{4.25}$$

Векторите $\vec{e}, \vec{r}$ са записани в координатна система Σ.

За да се докаже верността на формула 4.25, ще се разгледа частен случай, когато за ос на въртене се използва ос z в система Σ. От фиг. 4.3. се получава :

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha - \varphi) = r\cos\alpha\cos\varphi + r\sin\alpha\sin\varphi = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= r\sin(\alpha - \varphi) = r\sin\alpha\cos\varphi - r\cos\alpha\sin\varphi = -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= z \end{aligned} \tag{4.26}$$

От коефициентите, стоящи пред x , y, може да се състави матрицата:

$$[G(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Ако се сравни получената матрица с матрица 4.3 се вижда че:

$$[G(\varphi)] = [M(-\varphi)] \tag{4.28}$$

Уравнение 4.28. е правилно в общия случай, т. е. матрицата за преобразуване на координатите е свързана с матрицата на завъртане със зависимостта :

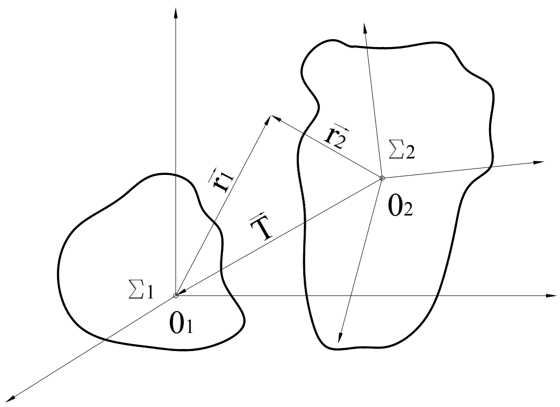
$$[G(\vec{e},\varphi)] = [M(\vec{e},-\varphi)] \tag{4.29}$$

Изразът 3.25, като се отчита формула 4.29, добива вида :

$$\vec{r}^{\,/} = [M(\vec{e},-\varphi)]\vec{r} \tag{4.30}$$

където $[M(e,-\varphi)]$ е матрицата на завъртането определена по формула 4.6 при замяна в нея на ъгъл φ с ъгъл (-φ).

На фиг. 4.4 е показана схема, когато началото на координатните системи на отчитане не съвпада. На схемата е показана системата Σ_1 с начало точка O_1 и радиус-вектор $\vec{r}_1$ на точка от тази система. Трябва да се запише радиус-вектор $\vec{r}_2$ за тази точка в система Σ_2 получена от система Σ_1 чрез паралелна транслация в точка O_2 и завъртане на ъгъл γ около произволно разположена ос g.



Фиг.4.4. Схема на две системи на отчитане

Както се вижда от фигура 4.4 радиус-векторът $\vec{r}_2$ в система Σ_1 се записва във вида:

$$\vec{r}_{2_{\Sigma 1}} = \vec{T} + \vec{r}_1$$

където $\vec{T}$ е векторът от точка O_2 към точка O_1

В система Σ_2 радиусът-векторът на същата точка на основата на формула 4.30 се получава :

$$\vec{r}_{2_{\Sigma 2}} = [M(\vec{g}-\gamma)](\vec{T}+\vec{r}_1) \tag{4.31}$$

Всички вектори, намиращи се в дясната част на 4.31, са записани като проекции по осите на координатна система Σ_1 .

В този случай, когато оста на завъртане g и ъгълът γ са неизвестни, а системите Σ_1 и Σ_2 са зададени със своите координати $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ и $\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2$, матрицата на прехода от система Σ_1 в система Σ_2 са записва с израза :

$$[G]=\begin{bmatrix} \vec{i}_2\,\vec{i}_1 & \vec{i}_2\,\vec{j}_1 & \vec{i}_2\,\vec{k}_1 \\ \vec{j}_2\,\vec{i}_1 & \vec{j}_2\,\vec{j}_1 & \vec{j}_2\,\vec{k}_1 \\ \vec{k}_2\,\vec{i}_1 & \vec{k}_2\,\vec{j}_1 & \vec{k}_2\,\vec{k}_1 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

Тъй като $\vec{i}_2\,\vec{i}_1 = \cos(\vec{i}_2, \vec{i}_1)$, $\vec{i}_2\,\vec{j}_1 = \cos(\vec{i}_2, \vec{j}_2)$ и т.н. то от формула 3.32 се вижда, че елементите на матрицата $[G]$ са косинуси на ъглите между осите на системи Σ_1 и Σ_2 .

4.1.5.Скаларно произведение на вектори в матричен запис

Скаларното произведение на два вектора е еквивалентно на умножение на матрица ред, съставена от проекциите на единия вектор и матрица стълб, съставена от проекциите на другия вектор [51] :

$$\vec{r}_1\,\vec{r}_2 = [r_1^T]\,[r_2] = [x_1, \quad y_1, \quad z_1]\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2 \tag{4.33}$$

Всеки от множителите на скаларното произведение на двата вектора може да има сложна форма , съдържаща произведение на матрици:

$$\vec{R}_1 = [M_1][M_2]\vec{r}_1, \quad \vec{R}_2 = [M_3][M_4]\vec{r}_2$$

Като се използва уравнение 3.33 се получава :

$$\vec{R}_1\,\vec{R}_2 = ([M_1][M_2][r_1])^T\,[M_3][M_4][r_2] \tag{4.34}$$

Тъй като транспонираните матрици се явяват произведение от няколко матрици, то израз 4.34 може да добие вида:

$$\vec{R}_1\,\vec{R}_2 = [r_1^T][M_2^T][M_1^T][M_3][M_4][r_2] \tag{4.35}$$

Скаларното произведение на два вектора може да се интерпретира като произведение на две величини. Едната от тях е дължината на първия вектор , а другата – това е проекцията на втория вектор върху първия. Проекцията на единия вектор върху другия е равна на произведението на дължината на вектора с косинуса на ъгъла между тях.

4.1.6. Векторно умножение на вектори в матричен запис

При векторно умножение на два вектора с общ множител – матрица или произведение на еднакви матрици – може да бъде изнесено зад знака на векторното произведение. Например ако $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ се описват с формула 4. 36 :

$$\vec{R}_1 = [M_1][M_2]\vec{r}_1, \quad \vec{R}_2 = [M_1][M_2]\vec{r}_2 \quad , \tag{4.36}$$

То :

$$\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = [M_1][M_2](\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \tag{4.37}$$

Записът, намиращ се от дясно на уравнение 4.37 се приема като произведение на матрици.

4.1.7. Скаларно-векторно произведение на три вектора в матричен запис

Ако три вектора са записани така :

$$\vec{A} = [M_1][M_2]\vec{a}, \quad \vec{B} = [M_1][M_2]\vec{b}, \; \vec{C} = [M_1]\vec{c}$$

и е нужно да се намери резултатът D от скаларно-векторно произведение на тези вектори, то трябва да се има предвид следното :

1. резултатът D представлява обема на паралелопипед , построен от векторите $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ като на страни;

2. резултатът D не зависи от системите на отчитане, в които са записани векторните множители (тези множители могат да бъдат записани в произволна система, но една за всички тях);

3. резултатът D не се променя при завъртане на всички вектори на един и същ ъгъл (това означава, че общият множител – матрица на завъртането може да се съкрати).

Като се има предвид изложеното, може да се съкрати матрицата $[M_1]$ и да се получи за D следния израз :

$$D = \vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C} = \left([M_2]\vec{a} \times [M_2]\vec{b}\right)\vec{c}$$

и като се има предвид формула 3.37 се получава :

$$D = \vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C} = \left([M_2]\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right)\vec{c} \tag{4.38}$$

Резултатът D може да се получи и в друга форма, като се съкрати смесеното произведение на множителите $[M_1][M_2]$, като предварително се представи вектора $\vec{C}$ по следния начин:

$$\vec{C} = [M_1][M_2]\left[M_2^{-T}\right]\vec{c}$$

При това изразът за D добива вида :

$$D = \vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left[M_2^{-T}\right]\vec{c} \tag{4.39}$$

4.1.8. Описване на движението на телата в матрична форма

Едно тяло се движи в неподвижна Декартова координатна система, като параметътър φ еднозначно определя положението на тялото в тази система. Движението на тялото в общия случай може да се представи като съвкупност от постъпателно и въртеливо движение. Това дава възможност с помощта на две функции, а именно вектора $\vec{H}(\varphi)$ и матрицата $[M(\varphi)]$, да се описва произволно движение на телата.

Векторът $\vec{H}(\varphi)$ определя изместването на началото на подвижната координатна система, свързана с тялото и съвпадаща с неподвижната система при $\varphi = 0$, т.е. характеризира постъпателната част на движение на тялото.

Матрицата $[M(\varphi)]$ определя завъртането на осите на подвижната координатна система, свързана с тялото (описва въртящото движение на тялото).

Векторът $\vec{H}(\varphi)$ се нарича вектор на транслацията (преместването), а матрицата $[M(\varphi)]$ - матрица на ротацията (завъртането).

Точка от тялото, която при ъгъл $\varphi = 0$, има радиус-вектор $\vec{r}(0)$, след преместване на тялото в ново положение (фиг. 4.5.) ще има в неподвижна координатна система следния радиус-вектор:

$$\vec{r}(\varphi) = \vec{H}(\varphi) + [M(\varphi)]\vec{r}(0) \tag{4.40}$$

За конкретност в отчитането на движението на тялото се въвежда Декартова система uvt с оси u, v, t, и координати $\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}$. В тази система векторът на транслация и матрицата на завъртане имат следния вид :

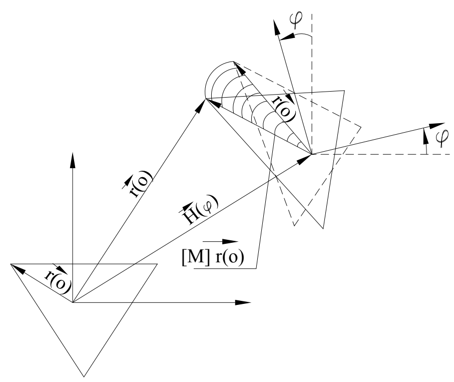
$$\vec{H} = H_u \vec{u} + H_v \vec{v} + H_t \vec{t} \tag{4.41}$$

$$[M(\varphi)] = \begin{bmatrix} M_{uu}(\varphi) & M_{uv}(\varphi) & M_{ut}(\varphi) \\ M_{vu}(\varphi) & M_{vv}(\varphi) & M_{vt}(\varphi) \\ M_{tu}(\varphi) & M_{tv}(\varphi) & M_{tt}(\varphi) \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Елементите на матрицата на завъртане се явяват косинуси на ъглите между завъртяните и незавъртяни координатни оси:

$M_{uu} = \vec{u}(0)\vec{u}(\varphi), M_{uv} = \vec{u}(0)\vec{v}(\varphi),\ M_{ut} = \vec{u}(0)\vec{t}(\varphi),\ M_{vu} = \vec{v}(0)\vec{u}(\varphi)$ и т.н.

Първият индекс от елементите на матрицата показва неподвижната координата, а вторият – подвижната.



Фиг. 4.5 Преместване (транслация и ротация) на триъгълник

Матрицата на завъртане първоначално може да бъде зададена не в система uvt , а в някоя друга, например xyz, началото на която съвпада с началото на uvt. За получаване на матрица $[M]_{uvt}$ с помощта на матрица $[M]_{xyz}$ може да се използва следната зависимост (долните индекси означават координатната система, в която е записана системата):

$$[M]_{uvt} = [G][M]_{xyz}\left[G^{-1}\right] \tag{4.43}$$

където $[G]$ е матрицата на прехода от система xyz в система uvt, елементи на която са косинусите на ъглите между осите на тези системи (формула 4.32):

$$[G]=\begin{bmatrix} \vec{u}\vec{x} & \vec{u}\vec{y} & \vec{u}\vec{z} \\ \vec{v}\vec{x} & \vec{v}\vec{y} & \vec{v}\vec{z} \\ \vec{t}\vec{x} & \vec{t}\vec{y} & \vec{t}\vec{z} \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

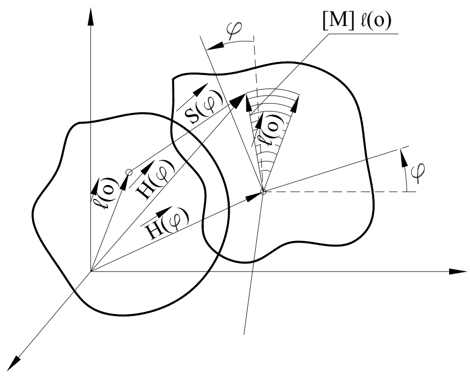
Обратната матрица $\left[G^{-1}\right]$ се получава от матрицата $[G]$, чрез транспониране:

$$\left[G^{-1}\right] = \left[G^{T}\right]$$

Съществува и друга схема на преместване на дадена фигура. При нея е известен законът на движение не на центъра на подвижната координатна система, а на друга точка от тялото, началното положение на която в неподвижната система се характеризира с радиус-вектора $\vec{e}(0)$ (фиг.4.6), а изместването - с вектора $\vec{S}(\varphi) = \vec{e}(\varphi) - \vec{e}(0)$

Векторът $\vec{e}(\varphi)$ се определя по общата формула 4.40 като се заменя $\vec{r}(\varphi)$ *с* $\vec{e}(\varphi)$ и $\vec{r}(0)$ *с* $\vec{e}(0)$:

$$\vec{e}(\varphi) = \vec{H}(\varphi) + [M(\varphi)]\vec{e}(0),$$



Фиг. 4.6 Схема на преместване на тяло

След заместване на тази зависимост в горната се получава израза:

$$\vec{S}(\varphi) = \vec{H}(\varphi) - \vec{e}(0) + [M(\varphi)]\vec{e}(0),$$

Откъдето:

$$\vec{H}(\varphi) = \vec{e}(0) + \vec{S}(\varphi) - [M(\varphi)]\vec{e}(0) \qquad (4.45)$$

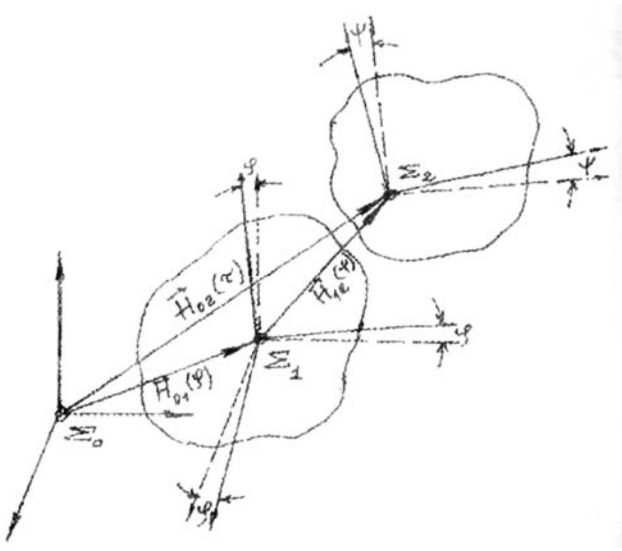
4.1.9. Абсолютно, относително и преносно движение

Нека едно тяло да се движи относително някаква координатна система на отчитане, която от своя страна се движи относително около неподвижна система на отчитане. **Движението на тяло относително подвижна система се нарича относително движение на тялото. Движение на подвижната система относно неподвижната – това е преносно движение. Движение на тялото относително неподвижна координатна система се нарича абсолютно движение на тялото**.

Законът за движение на тялото е известен , ако са известни вектора на преместването и матрицата на завъртането.

4.1.9.1.Определяне на абсолютното движение на тяло по зададени преносно и относително движение

Дадено е тяло 1, движението на което в неподвижна координатна система Σ_o се определя чрез зададените функции $[M_{01}(\varphi)]$ и $\vec{H}_{01}(\varphi)$. С тялото 1 е свързана подвижната координатна система Σ_1 (фиг. 3.7). Има и тяло 2 и свързана с него подвижна система Σ_2. Движението на тяло 2 се описва в система Σ_1 с помощта на зададената матрица $[M_{12}(\psi)]$ и зададения вектор $\vec{H}_{12}(\psi)$, където φ и ψ са известни функции от времето τ.



Фиг. 4.7. Координатни системи на отчитане

При $\tau = 0$ и ъгли $\varphi = \psi = 0$ подвижните системи Σ_1 и Σ_2 съвпадат с неподвижната система Σ_0.

За нуждите на изследването трябва да се определят функциите $[M_{02}(\tau)]$, $\vec{H}_{02}(\tau)$, с помощта на които се определя абсолютното движение на тяло 2 (относително неподвижната координатна система Σ_0).

Движението на тяло 2 относно подвижната система Σ_1 се явява относително, а движението на система Σ_1 (тяло 1) относително система Σ_0 – преносно.

Радиус-векторът на произволна точка от тяло 2 записан в система Σ_2 е $\vec{r}_{\Sigma_2}$. Радиус-векторът на същата точка в система Σ_0 в съответствие с ф-ла (4.40) се изразява със зависимостта :

$$\vec{r}_{\Sigma_0} = \vec{H}_{02}(\tau) + [M_{02}(\tau)]\vec{r}_{\Sigma_2} \tag{4.46}$$

където $\vec{H}_{02}(\tau)$ и $[M_{02}(\tau)]$ са търсените функции.

Може да се запише (съгласно ф-ла 4.40) израз за радиус-векторът за същата точка от тяло 2 в система Σ_1, като се има предвид, че движението на система Σ_2 относно система Σ_1 е известно :

$$\vec{r}_{\Sigma_1} = \vec{H}_{12}(\psi) + [M_{12}(\psi)]\vec{r}_{\Sigma_2} \tag{4.47}$$

Тъй като система Σ_1 от своя страна се движи по известна траектория ($[M_{01}(\varphi)]$, $\vec{H}_{01}(\varphi)$) относно система Σ_0, то радиус-векторът на същата точка от тяло 2 в система Σ_0 съгласно (3.40) има вида :

$$\vec{r}_{\Sigma_0} = \vec{H}_{01}(\varphi) + [M_{01}(\varphi)]\vec{r}_{\Sigma_1}$$

След заместване на уравнение 3.47 в горната зависимост се получава израза :

$$\vec{r}_{\Sigma_0} = \vec{H}_{01}(\varphi) + [M_{01}(\varphi)]\vec{H}_{12}(\psi) + [M_{01}(\varphi)][M_{12}(\psi)]\vec{r}_{\Sigma_2} \qquad (4.48)$$

Като се съпоставят получената зависимост и ф-ла 3..46, може да се направи извода, че търсените функции, описващи абсолютното движение на тяло 2 в този случай може да се изрази по следния начин :

$$\begin{aligned} &[M_{02}(\tau)] = [M_{01}(\varphi)][M_{12}(\psi)], \\ &\vec{H}_{02}(\tau) = \vec{H}_{01}(\varphi) + [M_{01}(\varphi)]\vec{H}_{12}(\psi) \end{aligned} \qquad (4.49)$$

4.1.10. Определяне на вектора на транслация и матрицата на завъртане при постъпателно движение на телата

Едно тяло се движи постъпателно в неподвижна координатна система на отчитане по следния закон $\vec{S} = \vec{S}(t)$. Параметърът t играе ролята на време.

В този случай матрицата на завъртане се превръща в единична матрица, а вектора на транслация е равен на вектора $\vec{S}(t)$:

$$[M(t)] = [E],\ \vec{H}(t) = \vec{S}(t)$$

Като се има предвид горния израз радиус-вектора на произволна точка от тялото в момент φ съгласно 3.40 има вида:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{S}(t) \qquad (4.50)$$

Ако тялото извършва сложно движение, съставено от няколко постъпателни движения, то резултантното движение на тялото е също постъпателно и векторът $\vec{S}(\varphi)$ е равен на геометричната сума от векторите описващи съставните движения :

$$\vec{S}(t) = \vec{S}_1(t) + \vec{S}_2(t) + ... + + \vec{S}_n(t) \qquad (4.51)$$

4.1.11. Определяне на вектора на транслация и матрицата на ротация при въртене на тяло около произволно разположена неподвижна ос

Дадена е неподвижна координатна система xyz с начало точката O (фиг.4.8). Тялото се върти около произволно разположена неподвижна ос e. Положението на тази ос в дадената координатна система се определя с помощта на векторите $\vec{e}$ и $\vec{l}$, където вектор $\vec{e}$ е единичният вектор, минаващ по оста на въртене, а вектор $\vec{l}$ свързва началото на координатната система с коя да е точка от оста на въртене.

Параметърът на движение се явява ъгъл φ на завъртане на тялото. Векторът на преместване се определя по формула 4.45.

В тази формула влиза преместването $\vec{S}(t)$ произволна точка от тялото. Като такава точка е добре да се вземе точка, лежаща на оста на въртене и херактеризираща се с радиус-вектора $\vec{l}$, тъй като нейното преместване $\vec{S}(\varphi)$ е нула. При това по формула 4.45 се получава :

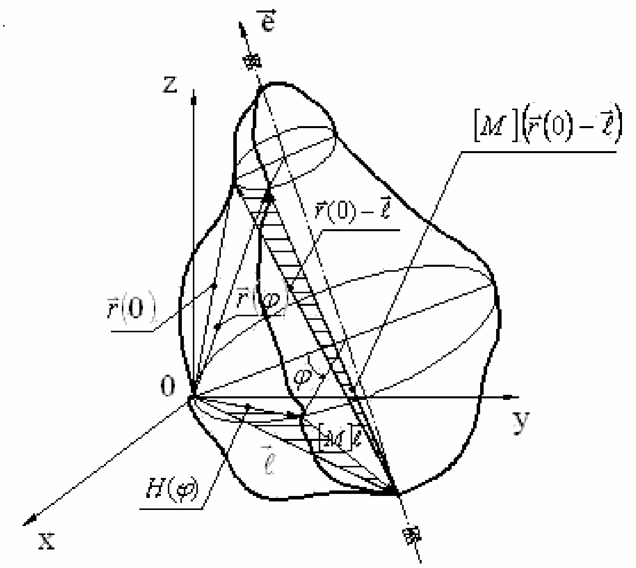
$$\vec{H}(\varphi)=\vec{l}-[M(\vec{e},\varphi)]\vec{l} \qquad (4.52)$$

Като се използва 4.52 и 4.40 може да се запише радиус-вектор на произволна точка от въртящото се тяло в момент φ :

$$\vec{r}(\varphi)=\vec{l}+[M(\vec{e},\varphi)]\left(\vec{r}(0)-\vec{l}\right) \qquad (4.53)$$

Това решение лесно може да се получи графично с помощта на фиг. 3.8. Ако ос е преминава през началото на координатната система ($\vec{l}=0$), формула 4.53 се опростява:

$$\vec{r}(\varphi)=[M(\vec{e},\varphi)]\vec{r}(0) \qquad (4.54)$$



Фиг. 4.8. Въртене на тяло около произволна ос

4.2. Числено моделиране на повърхнина, получена чрез обработване с режещ инструмент.

Като модел на повърхнина, обработена с режещ инструмент, в много случаи може да служи обвиващата повърхнина. От тази позиция теорията на обвиващата се явява част от теорията на формообразуването [26, 27, 107]. За да може да се опише обвиваща, мислено може да си представим следната картина. Нека определена повърхност извършва движение в избрана координатна система и нейното положение в произволен момент се определя от параметрите за движение. Съвкупността от повърхнини, получени при различни значения на параметрите на движение, образуват семейство от повърхнини. Това семейство от повърхнини може да има обвиваща. **Обвиващата – това е повърхнина допирателна по линия до всяко семейство от повърхнини**.

На фиг. 4.9 е показана обвиваща на семейство плоски криви.

Фиг. 4.9 Семейство плоски криви и тяхната обвиваща

Повърхнината, от която се получават семейството повърхнини се нарича обвивана. Математическото описание на обвиващата зависи от вида на задаване на семейството повърхнини.

4.2.1. Обвивано семейство повърхнини, зададено с уравнение в неявен вид

Нека обвиваната повърхност извършва движение в неподвижна координатна система x,y,z . В изходно (начално) положение обвиваната е зададена чрез уравнение в неявен вид:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4.55}$$

В произволно положение уравнението на обвиваната ще изглежда така :

$$F(x, y, z, \Psi) = 0, \tag{4.56}$$

където Ψ е параметър на движение.

Уравнение (4.56) може да се приеме за уравнение на семейството повърхнини, получено при движение на обвиваната повърхнина. Параметър, определящ това семейство, се явява Ψ.

Обвиващата на това семейство се описва със система от уравнения:

$$\begin{cases} F(x, y, z, \Psi) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, z, \Psi)}{\partial \Psi} = 0 \end{cases} \tag{4.57}$$

Първото уравнение определя семейството на обвиваните повърхнини, а второто определя условието на обвиване.

Геометричната интерпретация на второто уравнение от системата може да се запише така :

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} = \lim \frac{\Delta F}{\Delta \Psi} = 0 \ \text{\textit{при}} \ \Delta\Psi \to 0\,. \tag{4.58}$$

При преход към гранични стойности се получава:

$$\frac{\Delta F}{\Delta \Psi} = \frac{F(x, y, z, \Psi + \Delta\Psi) - F(x, y, z, \Psi)}{\Delta \Psi} = 0 \,. \tag{4.59}$$

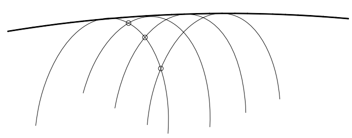
Тъй като F (x, y, z) = 0 от равенство 4.55 и 4.59 следва :

$$F(x, y, z, \Psi + \Delta\Psi) = 0 \tag{4.60}$$

Формули 4.59 и 4.60 позволяват да се преработи системата уравнения 4.57 до гранична стойност във вида :

$$\begin{cases} F(x, y, z, \Psi).0 \\ F(x, y, z, \Psi + \Delta\Psi) = 0 \end{cases} \tag{4.61}$$

Системата уравнения 4.61 при фиксирано значение на параметъра Ψ определя линията на пресичане на две съседни повърхнини от семейството криви. Ако параметърът Ψ се изменя непрекъснато, системата 4.61описва съвкупност от такива линии. При намаление на стойността на Ψ (Ψ=ΔΨ), пресичането на двете съседни обвивани се премества (фиг. 4.10 е показано преместване на пресечната точка по обвиваните криви). При промяна на параметъра на движение $\Delta\Psi \to 0$ обвиващата се явява допирателна линия на обвиваните повърхнини. **Съвкупността от всички допирателни линии дава обвиващата повърхнина.**



Фиг. 4.10. Преместване на точката на пресичане на две съседни криви

При фиксирано значение на параметъра Ψ системата уравнения 4.57 описва допирателна линия, контактуваща с една от повърхнините на обвиваното семейство криви. Тази линия се нарича характеристика**. В точките от характеристиката нормалите към обвиваната и обвиващата повърхнина съвпадат.**

Ако от второто уравнение на система 4.57 може да се изрази аналитично параметъра Ψ чрез координатите x, y, z и се замести в първото уравнение на системата ще се получи уравнение на обвиващата не във вид на система от две уравнения , с която трудно се работи, а като едно уравнение, имащо вида :

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{4.62}$$

Такава операция може да се направи само в отделни случаи. Система 4.61 описва и повърхнини, съдържащи не само обвиваща, но и особени точки, в които въобще е невъзможно да се прекара допирателна повърхнина, или има няколко такива.

4.2.2. Обвиваното семейство повърхнини, зададено с уравнение във векторно-параметричен вид

Уравнението на семейство повърхнини, получени при движение на обвиваните повърхнини, записано в координатна система във векторно-параметричен вид е [51]:

$$\vec{r}=\vec{r}\left(\Theta,\nu,\Psi\right) \tag{4.63}$$

където Θ,ν са криволинейните координати на точки от обвиваната повърхнина; Ψ е параметърът на движението.

Условието за обвиване в този случай се явява равенството на произведението от трите вектора на нула, представляващи частни производни от радиус-вектора по параметри:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\nu}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Psi}=0 \tag{4.64}$$

Условието 3.64 може да се запише в кинематичен вид :

$$\vec{N}.\vec{V}=0 \tag{4.65}$$

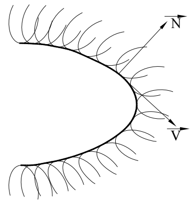
Където $\vec{N}$ е векторът на нормалата към обвиваната повърхнина, който е равен на :

$$\vec{N}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\nu} \tag{4.66}$$

Векторът $\vec{V}$ е скоростта на точка от обвиваната повърхнина , която е попаднала на характеристиката. Тази скорост е равна на :

$$\vec{V}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial\Psi} \tag{4.67}$$

В уравнения (4.64) и (4.65) има изискване векторът на скоростта на точка от обвиваната повърхност попаднала на характеристиката, да е перпендикулярен към нормалата, или да лежи в равнината, допирателна към обвиващата и обвиваната. Това се определя от условието, че всяка обвивана повърхност по всяко време на движение се намира от едната страна на обвиващата (Фиг. 4.11) и поради това точка от обвиваната повърхнина, попаднала на характеристиката, не може да има съставляваща на скоростта, насочена по нормалата.



Фиг. 4.11. Взаимно положение на векторите $\vec{V}$ *и* $\vec{N}$

Системата от уравнения, определяща обвиваното семейство от повърхнини, зададена във векторно - параметрична форма има вида:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(\Theta, \nu, \Psi), \\ \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \Theta} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \Psi} = 0 \end{cases} \tag{4.68}$$

Ако условието за обвиване е аналитически решимо относно параметъра на движение, може да се определи функцията $\Psi(\Theta, \nu)$ от второто уравнение на система 4.68. След заместване на израза за второто уравнение от система (3.68) в първото уравнение на същата система, се получава едно векторно-параметрично уравнение, описващо обвиващата:

$$\vec{R} = \vec{R}(\Theta, \nu) \tag{4.69}$$

където $\vec{R}(\Theta, \nu) = \vec{r}(\Theta, \nu, \Psi(\Theta, \nu))$ (4.70)

4.2.3. Математичен модел на обобщен процес на формообразуване

В основата на много технологични процеси (получаване на повърхността на детайла с режещ инструмент) на формообразуване лежи обхождането. При него формата на получаваната повърхнина на детайла се отличава по форма от производящата повърхност. В дадената част се разглежда подход за съставяне на математичен модел за голяма група технологични процеси на формообразуване, използвани в машиностроенето и уредостроенето за изработване на детайли с различни по форма режещи инструменти. Общото, обединяващо всички тези процеси, е следното :

- за обвивана се използва производяща повърхнина, формата на която е известна;

- обвиващата се явява обработена от режещия инструмент повърхност, формата на която е неизвестна;

- обвиваната (производяща) повърхнина е свързана относително условно чрез неподвижна координатна система за отчитане, например с машината, и може да извършва сложно движение, явяващо се съвкупност от въртеливо и праволинейно- постъпателно движение. Положението на производящата повърхнина в указаната координатна система се определя от параметъра за движение;

- заготовката в тази координатна система може да се върти около собствена ос. Ъгълът на завъртане на заготовката зависи от параметъра на движение на производящата повърхнина и тази зависимост е известна.

Целта за съставяне на математичния модел е получаване на уравнението на обработената повърхнина и при необходимост - неговия анализ. Ето защо по долу ще бъде описан математичен модел на обобщен технологичен процес на формообразуване без конкретизация на формата на производящата повърхнина и вида на нейните движения.

Нека в неподвижна координатна система за отчитане параметърът Ψ характеризира положението на движещата се производяща повърхнина. Параметърът φ определя в същата координатна система положението на въртящата се заготовка. Между φ и Ψ съществува функционална зависимост, така че може да се счита, че движението на указаните обекти се определя от един параметър.

В математическия модел на технологичния процес на формообразуване влиза описание на формата на производящата повърхнина и законът на нейното движение относно заготовката, а също получаване на уравнение на обработената повърхнина като обвиваща на семейство производящи повърхнини. За съставяне на математическия модел се въвеждат три координатни системи на отчитане:

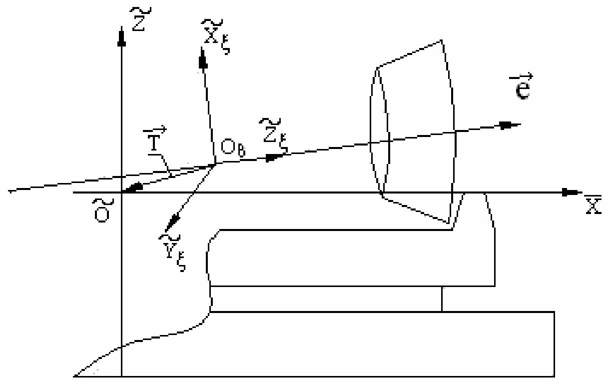
- Σ_b подвижна правоъгълна координатна система твърдо свързана със заготовката , въртяща се около своя ос е (фиг.4.12). В тази система е желателно да се получи уравнението на обвиващата, т.е. уравнението на обработената повърхнина. Началото на тази система е точка O_b и лежи на ос е;

- $\widetilde{\Sigma}_b$ неподвижна Декартова система с оси $\widetilde{x}_b, \widetilde{y}_b, \widetilde{z}_b$. В начално положение , когато ъгли Ψ=0, φ=0, двете системи съвпадат;

- $\widetilde{\Sigma}$ неподвижна Декартова система с начало точка $\widetilde{O}$ и оси $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$. В тази система е удобно да бъде описана производящата повърхнина в начално положение при параметър Ψ=0.

Последователността на съставяне на математичен модел е следната:

- в координатна система $\widetilde{\Sigma}$ се записва уравнението на производящата повърхнина в начално положение;



Фиг. 4.12. Избор на координатни системи за отчитане

- прави се преход в система $\widetilde{\Sigma}_b$ и там се записва уравнението на производящата повърхнина в произволно положение;

- след това се отива към система Σ_b, въртяща се заедно със заготовката. В тази подвижна, координатна система се определя обвиващата на семейството производящи повърхнини, която служи като модел на обработената повърхнина.

В начално положение радиус-векторът на произволна точка от производящата повърхнина в координатна система $\widetilde{\Sigma}$ е равен на :

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}\left(\Theta, \nu\right) \tag{4.71}$$

където ν и Θ са параметрите или криволинейните координати на тази точка.

В координатна система $\widetilde{\Sigma}_b$ радиус векторът на същата точка от производящата повърхнина, съгласно (3.31) **се** изразява от формулата :

$$\widetilde{\vec{r}}\,' = \left[M\left(\vec{g} - \gamma\right)\right]\left(\vec{T} + \vec{\rho}\left(\Theta, \nu\right)\right) \tag{4.72}$$

където $\left[M\left(\vec{g} - \gamma\right)\right]$е матрицата на завъртане на система $\widetilde{\Sigma}$ около ос g на ъгъл γ до съвпадане със система $\widetilde{\Sigma}_b$, описана с формула 4.6 при замяна на φ с γ и е със g (елементите на матрица

$[M(\vec{g}-\gamma)]$ са постоянни величини); $\vec{T}$ - векторът с постоянна дължина свързващ точки O_b и $\widetilde{O}$ (фиг. 4.12).

Всички вектори, намиращи се от дясната част на уравнение 4.72, са записани като проекции на оси от координатна система $\widetilde{\Sigma}$.

В произволен момент ($\Psi \neq 0$) радиус-векторът на тази точка от производящата повърхнина в неподвижната координатна система $\widetilde{\Sigma}_b$. на основата на формула 4.40 има вида:

$$\widetilde{\vec{r}} = \vec{H}(\Psi) + [M(\Psi)]\widetilde{\vec{r}}' \tag{4.73}$$

За преход от неподвижна координатна система $\widetilde{\Sigma}_b$ в подвижна координатна система Σ_b като се използва зависимост (4.30) и като се има предвид , че оста на въртене на заготовката минава през началото на система Σ_b , се получава следната зависимост:

$$\vec{r} = [M(\vec{e}-\varphi)]\widetilde{\vec{r}}' \tag{4.74}$$

След заместване на формула (4.73) в (4.74) се получава уравнение на производящата повърхнина в подвижната система Σ_b , свързано с въртенето на заготовката:

$$\vec{r} = [M(\vec{e}-\varphi)]\left(\vec{H}_{(\Psi)} + [M_{(\Psi)}]\widetilde{\vec{r}}'\right) \tag{4.75}$$

където радиус- векторът $\widetilde{\vec{r}}'$ се определя от уравнение 4.72

В уравнение (4.75) векторът на изместване и матрицата на завъртане, описващи движението на производящата повърхнина в неподвижната координатна система $\widetilde{\Sigma}_b$, не са конкретизирани. Това може да става в зависимост от конкретната схема на обработване.

4.2.4. Математичен модел на процеса на изработване на цилиндрични детайли с периодичен профил (зъбни колела) с инструмент тип гребен

Математическият модел на процеса на получаване на цилиндрични детайли с периодичен профил с инструмент тип гребен (инструментален гребен, червячна фреза) е много разпространен в машиностроенето и уредостроенето. Общата методика на описание на процеса на формообразуване е дадена в раздел 4.2.3. При този процес има два фактора, които го различават от общото:

- формата на обвиващата е известна, тъй като е известен детайлът, който ще се изработи. Неизвестна се явява формата на производящата повърхнина, в дадения случай – профилът на инструмента - гребен (при зададени движения на заготовката и инструмента). Това отличие може да се преодолее на терминологично ниво: може детайлът да се приеме за производяща повърхнина, а гребенът – за обработван детайл;

- вторият фактор е по съществен. В този процес гребенът (имаща ролята на заготовка), не се върти, а се движи праволинейно постъпателно.

В процеса на обработване (бъдещия истински детайл) се върти около своята ос с ъглова скорост ω, а рейката се движи постъпателно със скорост v (фиг.4.13.). Тези премествания са строго съгласувани:

$$\frac{V}{\varpi} = C \tag{4.76}$$

където C е зададената константа.

Профилът на детайла е зададен в система xyz, свързана със заготовката, само аналитично:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u, z) \equiv x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z\vec{k} \tag{4.77}$$

(u и z – параметри), само таблично, наборът от три стойности за всяка точка от профила на детайла са: x, y, ά, където ά е ъгъла на наклона на допирателната към профила на детайла в дадената точка.

Трябва да се определи профила на гребена в система XYZ, свързана с рейката или аналитични или таблично.

В начално положение, когато завъртането на заготовката е равно на нула, координатните системи xyz и XYZ съвпадат една с друга и с неподвижната координатна система $\widetilde{\Sigma}$, имаща координати $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}$ (фиг.4.13).

Въртенето на заготовката се извършва около ос $\widetilde{z}$, а движението на рейката – в направление обратно на направлението на ос $\widetilde{x}$.

Алгоритъмът за решение на задачата се състои от няколко стъпки. Записва се радиус-векторът на произволна точка от детайла в неподвижната координатна система $\widetilde{\Sigma}$ в произволен момент φ :

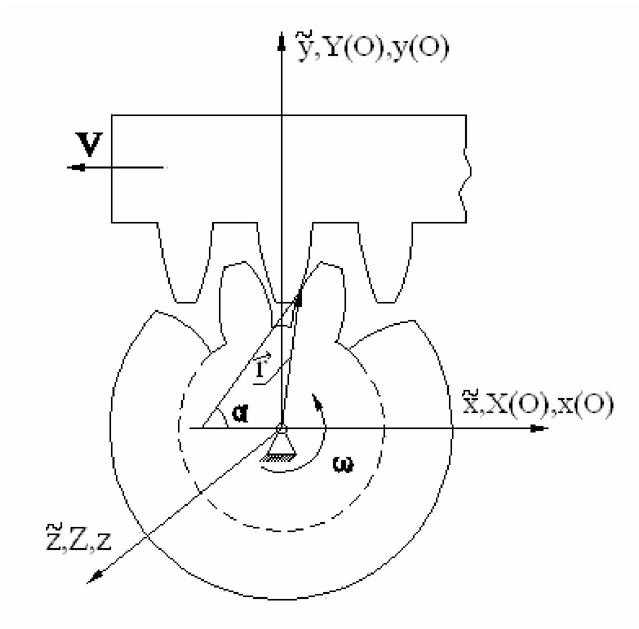
$$\widetilde{\vec{r}} = [M(3, \varphi)]\vec{r}(u, z) \tag{4.78}$$

Преходът от система $\tilde{\Sigma}$ в подвижната система XYZ, свързана с постъпателното движение на гребена (фиг. 4.14) става по зависимостта :

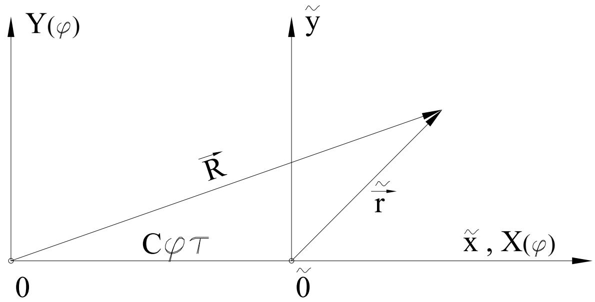
$$\vec{R} = C\varphi\vec{i} + \vec{\tilde{r}} = C\varphi\vec{i} + [M(3,\varphi)]\vec{r}(u,z) \tag{4.79}$$

След това се описва в система XYZ обвиващата (4.79):

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}(u,z,\varphi) \\ \dfrac{\partial\vec{R}}{\partial u} = \dfrac{\partial\vec{R}}{\partial z}\dfrac{\partial\vec{R}}{\partial\varphi} = 0 \end{cases} \tag{4.80}$$



Фиг. 4.13. Гребен и обработвано колело



Фиг. 4.14 Подвижна и неподвижна система на отчитане

За определяне на условието за обхождане се извършва диференциране на 4.79 по аргументи и след съответно умножение на получените вектори :

$$y_u \left(-y(u)+C\cos\varphi\right)-x_u \left(x(u)-C\sin\alpha\right)=0 \qquad (4.81)$$

където $x_u = \dfrac{\partial x(u)}{\partial u}$, $y_u = \dfrac{\partial y(u)}{\partial u}$

Като се раздели (4.81) на x_u и като се има предвид, че :

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{y_u}{x_u}$$

се получава условието за обвиване във вида :

$$\sin(\alpha+\varphi)=\frac{1}{C}\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha\right) \qquad (4.82)$$

От уравнение 4.82 може да се определи :

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{C}\right)-\alpha \qquad (4.83)$$

Накрая се замества (4.83) в (4.79) и се получава векторно-параметрично уравнение на обвиващата т.е. уравнение на профила на рейката, в система XYZ, свързана с рейката:

$$\vec{R}=\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C\varphi + x(u)\cos(\varphi) - y(u)\sin\varphi \\ x(u)\sin\varphi + y(u)\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.84)$$

където φ се определя по формула 3.83.

Тангенсът на ъгъла на наклон на допирателната към профила на рейката се пресмята в система XYZ по формула :

$$tg\,\alpha_{рейка} = \frac{dY}{dX} = \frac{x_u \sin\varphi + y_u \cos\varphi}{x_u \cos\varphi - y_u \sin\varphi} = \frac{tg\varphi + \dfrac{y_u}{x_u}}{1 - \dfrac{y_u}{x_u} tg\,\varphi} = tg(\alpha+\varphi)\ , \qquad (4.85)$$

следователно , $\alpha_{рейка} = \alpha + \varphi$ (4.86)

По описания алгоритъм може да се състави програма за определяне на профила на гребена по зададен профил на детайла.

4.3. Изводи към четвърта глава

1. За да се състави аналитичен математичен модел на произволен процес на формообразуване е необходимо да се направи матрично записване на закона на движение на тялото. За целта са разгледани основни теоретични въпроси като матрица на транслация и вектор на ротация, преобразуване на координати, скаларно и векторно умножение на вектори и най-често срещаните случаи на движение на телата като те са описани в матрична форма;

2. На базата на теоретичните въпроси е дадена методика на описване на обработваната повърхнина получена като обвиваща чрез обработване с режещ инструмент;

3. Разгледан е обобщен математичен модел на описание на процеса на формообразуване при получаване на повърхнина на детайла различна от формата на инструмента;

4. На база на общата методика за формообразуване е изведен и математичен модел на процес за изработване на цилиндрични детайли с периодичен профил (зъбни колела) с инструмент тип гребен.