

ЧЕСТОТНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА НЕЛИНЕЙНИ ПАРАМЕТРИЧНИ ТРЕПТЕНИЯ НА МАХАЛО

Светлин СТОЯНОВ

sstoyanov@uni-ruse.bg

Катедра Техническа механика,
Русенски университет, Русе 7017, БЪЛГАРИЯ

Резюме

Изследвано е честотното поведение на нелинейните параметрични трептения на математично махало, симулиращо феномена люлеене чрез самозасилване. Построени са триизмерни амплитудно-честотни характеристики на трептенията, намерени са зоните с максимални стойности на амплитудите, съответстващи на появата на явлениято резонанс. В резултат на това са определени и резонансните честоти на трептенията. Установени са разликите със собствената честота на линеаризирано математично махало. Показана е високата чувствителност в резонансните зони. Анализирано е влиянието на наличието на сухо триене. Представена е макро и микро геометрията на повърхнините, изграждащи амплитудно-честотните характеристики.

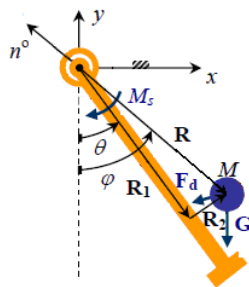
Ключови думи:

честотни характеристики, нелинейни трептения, параметрични трептения, люлеене чрез самозасилване, собствени честоти.

1. Въведение

1.1. Феноменът люлеене чрез самозасилване

В [Боздуганова и др. 2009] е представено изследване на параметричните трептения на математично махало, като симулатор на люлеене чрез самозасилване. Разработката задълбочава изследванията в тази област, предлагайки по-реалистично моделиране на феномена самозасилване. Отчитат се и двете движения на общия масов център: преместване R_1 по оста и R_2 – напречно на оста, съгласно фиг. 1.



Фиг. 1. Симулатор на люлка
[Боздуганова и др. 2009]

Изследвано е наличието на сухо триене в ставата O . Установено и обяснено е интересно и важно явление. При смяна на посоката на завъртане на махалото, реакцията в тази става променя скокообразно направлението си, а съпротивителният момент посоката си. Тази промяна в крайните положения на махалото може да се разглежда като идеално еластичен удар в ставата, който при достатъчна хлабина в нея обяснява възникващия при люлеене повтарящ се звук на „тракане”.

Разработения математичен модел [Боздуганова и др. 2009] е изследван във времевата област. Изследването е проведено при движение на масовия център зададено посредством законите

$$R_1 = H + A_1 \sin(2\Omega_0 t), \quad (1)$$

$$R_2 = A_2 \sin(\Omega_0 t), \quad (2)$$

$$\text{където } \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} = \sqrt{\frac{9.807}{2.8}} = 1.87 \text{ rad/s}$$

е собствената честота на линеаризирано математично махало, имащо дължина $H = 2.8 \text{ m}$

съответстваща на тази на изследваното. Тази честота е избрана за единица честота $\omega_0 = 1$.

1.2. Честотни характеристики на нелинейни трептения

При по-задълбочено изучаване, интерес представлява честотното поведение в диапазон от честоти на смущенията (възбужданията) R_1 и R_2 . Актуалността на това изследователско направление се дължи на факта, че честотните свойства на нелинейните параметричните трептения на махало са недостатъчно изучени, а същевременно те са в основата на функционирането на важни механични системи. В този смисъл, като пример могат да бъдат посочени управляемите ходови системи на транспортните машини [Kecik et al. 2011] и системите за виброизолация [Legeza 2008].

Интерес представлява също така, резонансната честота на възникващите нелинейни параметрични трептения и установяване на отклоненията спрямо тази при линеаризираното математично махало. В настоящото изследване това е реализирано чрез намиране на работната точна на амплитудно-честотните характеристики, където амплитудата има максимална стойност, т.е. където се наблюдава явлението резонанс. Това изисква построяване на амплитудно-честотните характеристики, което е реализирано посредством математичния модел изведен в [Боздуганова и др. 2009].

При нелинейни трептения на дадена маса или система са възможни множество амплитудно-честотни характеристики. Това се дължи на зависимостта на честотата от амплитудата, а от там и от началните условия. При неустановените режими, при дадена честота са възможни различни амплитуди на трептене. В настоящото изследване, тази многозначност е решена посредством отчитане на максималната амплитудата след установяване на трептенията и за конкретни начални условия.

1.3. Използвани величини и означения

Освен описаните до тук величини, в изследването ще бъдат използвани още и:

- t, s – време;
- x, y, m – декартови координати на масата M (фиг. 1);
- ω_1 и ω_2 – честота съответно на преместванията R_1 и R_2 . Една единица се равнява на собствената честота на линеаризирано математично махало Ω_0 ;

▪ $x_{\max}$ и $y_{\max}$, m – максимална амплитуда на абсолютното преместване на масата M съответно по ос x и по ос y , отчетено спрямо равновесното положение;

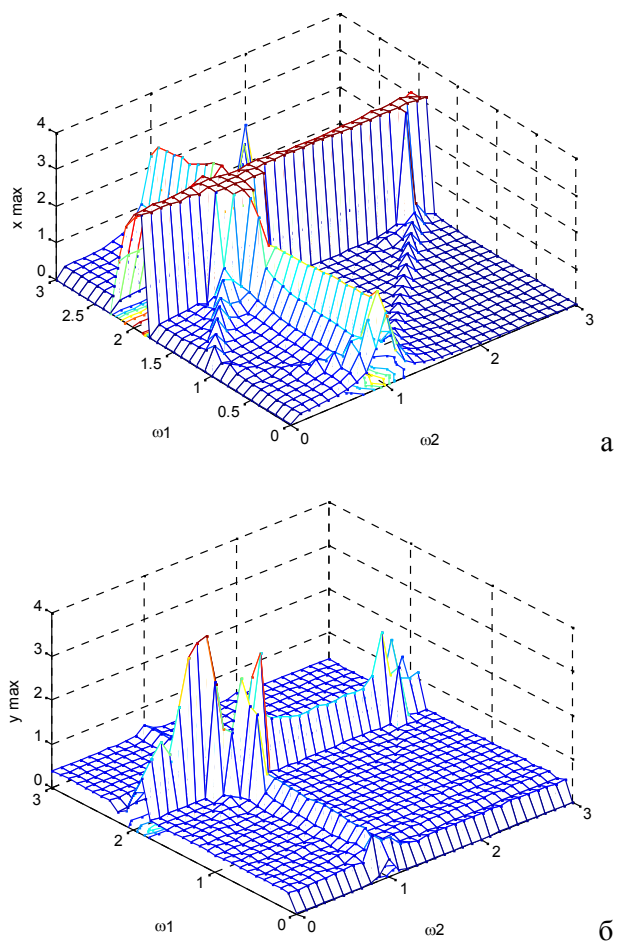
▪ $\theta_{\max}, rad$ – максимална амплитуда на ъгъла θ (фиг. 1), отчетен спрямо равновесното положение.

2. Изследване при отсъствие на триене в ставата

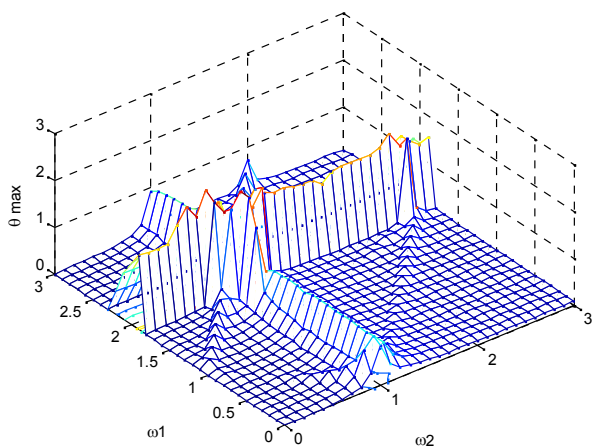
За целта на изследването ще задаваме различни стойности на честотите ω_1 и ω_2 на смущенията, при запазване на стойностите на останалите параметри съгласно [Боздуганова и др. 2009].

2.1. Предварително сканиране

Реализирано е сканиране на зоната $[0 \leq \omega_1 < 5, 0 \leq \omega_2 < 5]$ със стъпка 0.1 безразмерни единици. На фиг. 2 и фиг. 3 са представени амплитудно-честотните характеристики на математичния модел.



Фиг. 2. Зависимости между честотата на смущенията и амплитуда на абсолютното преместването на масата: а – по ос x ; б – по ос y



Фиг. 3. Зависимост между честотата на смущенията и амплитуда на ъгъла на завъртане на оста на махалото

В макрогеометрията на повърхнините се наблюдават:

- тесни и дълги участъци, успоредни на осите и съответстващи на $\omega_1 \approx 2$ и при $\omega_2 \approx 1$,
- субрезонансни линии, сключващи ъгъл около 45 градуса с гореописаните зони;
- характерен участък $[1.5 \leq \omega_1 < 2.5, 0.1 \leq \omega_2 < 1.5]$, който ще наречем зона на максималните амплитуди или **главна резонансна зона**.

Максималната стойност на ъгъла θ е 120° при честоти на смущенията (възбужданията) $\omega_1 = 1.7$ и $\omega_2 = 0.9$. Ако използваме така определената максималната стойност като показател за местонахождението на резонанса, то като резонансни честоти можем да посочим:

- резонансна честота на смущението по оста на махалото $\omega_1 = 1.7$;
- резонансна честота на смущението перпендикулярно на оста на махалото $\omega_2 = 0.9$.

Разликите със собствената честота на линеаризирано математично махало са:

- относителна
- абсолютна

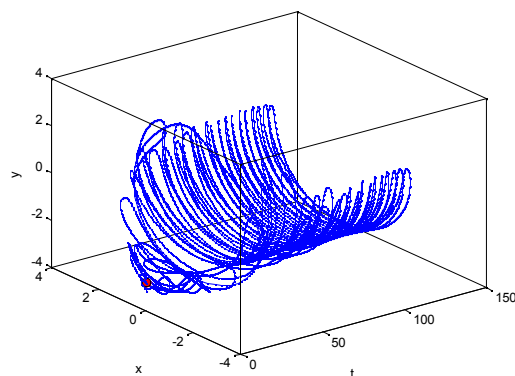
$$\Delta = \frac{\delta}{\omega_1} 100\% = 11\%.$$

Интерес представляват и отношенията [Вае 2006]:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1.7}{0.9} = 1.9; \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{0.9}{1} = 0.9;$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1.7}{1} = 1.7.$$

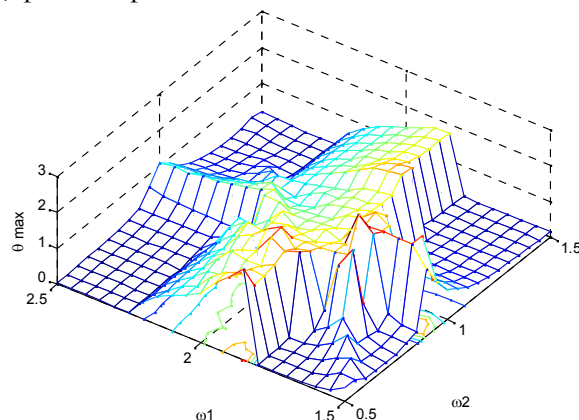
Стабилността на трептенията в тази работна точка се вижда на фиг. 4.



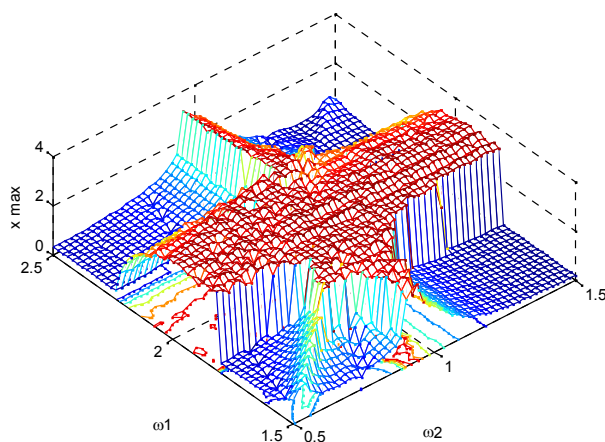
Фиг. 4. Поведение във времевата област. Максимална стойност на амплитудата след стабилизиране: по ос y - 3.1 m и по ос y - 1.5 m

2.2. Фино сканиране

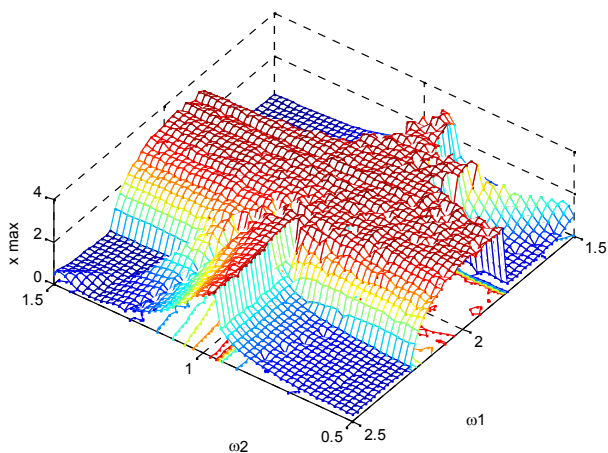
Сканираме главната резонансна област със стъпка 0.05. Установява се нова резонансна точка, съвсем близо до предходната, но със значително по-голяма стойност на резонансната амплитуда. Това показва силната чувствителност на системата в тази зона – фиг. 5, фиг. 6 и фиг. 7.



Фиг. 5. Зависимост между честотата на смущенията и амплитуда на ъгъла на завъртане на оста на махалото



Фиг. 6. Микрогеометрия на резонансната зона – изглед 1



Фиг. 7. Микрогеометрия на резонансната зона – изглед 2

Максималната стойност на ъгъл θ е при честоти на смущенията $\omega_1 = 1.65$ и $\omega_2 = 0.95$.

Разликата със резонансната честота на линеаризирано математично махало в този случай е:

- относителна $\delta = \omega_0 - \omega_1 = 0.05$;
- абсолютна $\Delta = \frac{\delta}{\omega_1} 100\% = 5\%$.

Отношенията на честотите са:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1.73; \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = 0.95; \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = 1.65$$

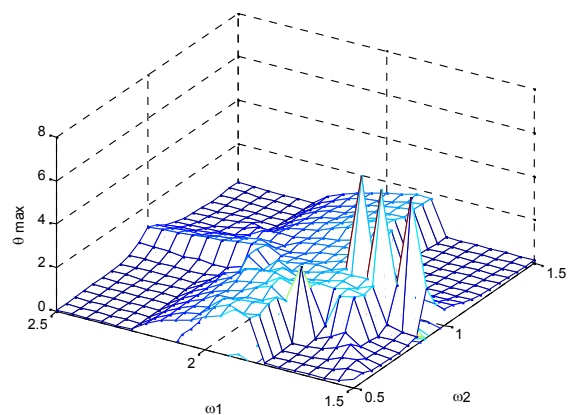
3. С триене в ставата

Реализирано е сканиране на зоната $[0 \leq \omega_1 < 3, 0 \leq \omega_2 < 3]$ със стъпка 0.05 единици. Не се наблюдават промени в макрогеометрията на характеристиките. Резултатите за главната резонансна зона са представени на фиг. 8 и фиг. 9. Наличието на сухо триене повишава грапавостта на повърхнините в тази зона.

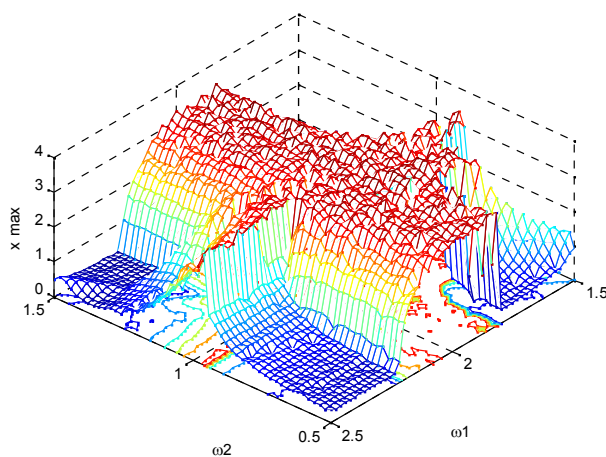
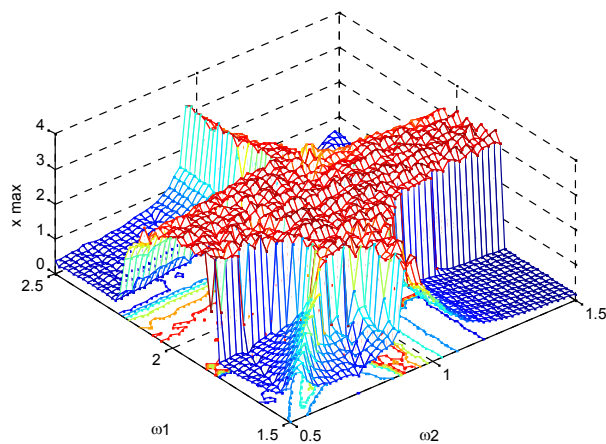
Имаме три пикови стойности на ъгъла θ , при които трептенията преминават в ротация на махалото около ставата в т. О. Такова е поведението например при честоти $\omega_1 = 1.75$ и $\omega_2 = 0.95$. За сравнение, при честоти съответстващи на тези на линеаризираното математично махало имаме максимален ъгъл 110° [Боздуганова и др. 2009].

При наличие на триене, разликата със собствената честота на линеаризирано математично махало е:

- относителна $\delta = \omega_0 - \omega_1 = 0.25$;
- абсолютна $\Delta = \frac{\delta}{\omega_1} 100\% = 33.3\%$.



Фиг. 8. Зависимост между честотата на смущенията и амплитуда на ъгъла на завъртане на оста на махалото при наличие на сухо триене



Фиг. 9. Микрогеометрия на резонансната зона на трептенията по координатата x на масата M при наличие на сухо триене: а – изглед 1, б – изглед 2

Отношенията на честотите са:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1.75}{0.95} = 1.84; \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{0.95}{1} = 0.95;$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{1.65}{1} = 1.65.$$

3. Заключение

Изследвано е честотното поведение на нелинейните параметрични трептения на махало при люлеене чрез самозасилване. Получените резултати дават възможност за избор на честотата така, че да бъде получена максимална амплитуда или напротив – да бъдат избегнати резонансните области.

Както е известно, познаването на поведението на обекта на управление дава възможност да бъде определено подходящото въздействие за постигане на зададената цел. В този смисъл, получените резултати могат да се разглеждат като честотен модел на системата.

Определената в това изследване форма на повърхнините в резонансната зона дава информация за задълбочени съвременни изследвания, посредством които могат да бъдат изучени сложни явления в динамиката на нелинейните трептения.

Необходимо е да се отбележи също така, че резултатите от представената разработка имат приложение не само в строго техническите области на човешкото познание и творчество. Например, синтезът на нови графични образи е проблем с фундаментално значение за дизайна. Възможностите, които предоставят компютърните симулации определят интереса към генерирането на графични форми отразяващи явления и процеси от реалния свят [Ченчева 2003].

Благодарности

Изследванията са подкрепени по:

■ Договор № BG051PO001-3.3.04/28, „Подкрепа за развитие на научните кадри в

областта на инженерните научни изследвания и иновациите”. Проектът се осъществява с финансовата подкрепа на Оперативна програма „Развитие на човешките ресурси” 2007-2013, съфинансирана от Европейския социален фонд на Европейския съюз“;

■ Проект 2011-МТФ-01, финансиран от фонд Научни изследвания при Русенски университет.

Литература

Боздуганова, В.С., В.Г. Витлиев. Динамика на махало с променлива дължина и сухо триене като симулатор на люлка. Механика на машините, Т. 17 (82), № 3, 2009.

Ченчева, Десислава. Генериране на графични мотиви чрез симулиране на фазовото състояние на динамична система. Студентска научна сесия. Технически университет – Варна, 17-18 април 2003.

Legeza, V. Determination of the amplitude-frequency characteristic of a vibroprotective system with two mass pendulum damper in the linear statement. Strength of materials, vol. 40, no. 6, 2008.

Kecik, K., J. Warminski. Dynamics of an Autoparametric Pendulum-Like System with a Nonlinear Semiactive Suspension. Mathematical Problems in Engineering, Volume 2011, Article ID 451047, Hindawi Publishing Corporation.

Bae, S. Equivalence of the pumping of a swing and the parametric resonance. European journal of physics, 27 (2006), 291–298.

FREQUENCY RESPONSE OF NONLINEAR PARAMETRIC OSCILLATIONS OF A PENDULUM

Svetlin Stoyanov

sstoyanov@uni-ruse.bg

Department of Mechanics, University of Rousse, Rousse 7017, BULGARIA

The frequency response of nonlinear parametric oscillations of a pendulum is investigated. The pendulum simulates the swinging with self acceleration phenomenon. Three dimensional amplitude-frequency characteristics are built. The resonance zones are located. As a result of this, the resonance frequencies of the oscillations are found. The differences with a naturally frequency of linearized mathematical pendulum are calculated. High sensitivity in the resonance zone is demonstrated. The influence of coulomb friction is analyzed. The macro and micro geometries of surfaces of amplitude-frequency characteristics are presented.